

Namn:.....

4-7 Pythagoras' sats



Inledning

Nu har du lärt dig en hel del om trianglar. Du vet vad en spetsig och en trubbig triangel är liksom vad en liksidig och en likbent triangel är. Vidare vet du att vinkelsumman i en triangel är konstant: 180 grader. Du har också lärt dig räkna med kvadrater och rotuttryck.

I det här avsnittet skall du studera rätvinkliga trianglar och **lära dig ett viktigt samband mellan längden på sidorna i en rätvinklig triangel**. Det har varit känt sedan urminnes tider, och kallas för Pythagoras sats.

Pythagoras var en matematiker i antiken Grekland, och levde på 500-talet före Kristus på ön Samos. Han var tidigt intresserad av matematik, och trodde på att verkligheten var uppbyggd av enheter som kunde uttryckas i förhållanden av tal. Han hade många lärjungar, men lämnade inga skrifter efter sig. Han har i alla fall fått ge namn åt detta **ett av världens viktigaste matematiska samband**.

Varför tror du att detta är ett av de viktigaste sambanden? Inte helt lätt att se direkt, men tänk så här: ”hur bär jag mig åt för att skapa en exakt rät vinkel om jag bara har ett måttband och lite mattekunskaper?” (Räta vinklar behöver du till exempel när du skall bygga husgrunder. Greker och romare byggde utan laserinstrument!)

Svar:.....
.....

Skall man bygga hus krävs att man håller reda på vad som är lodrätt och vad som är lodrätt. Ett lod fixar det senare, och en rät vinkel ordnar en vågrätt linje. Det visste till exempel romarna när de byggde akvedukten Pont du Gard för 2000 år sedan.

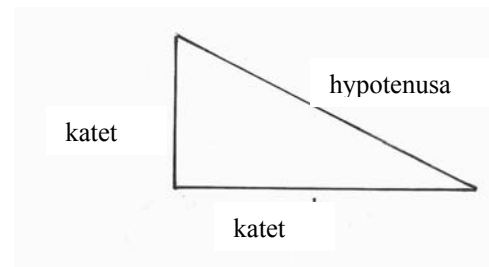


Vad säger Pythagoras' sats?

Vi startar med några definitioner:

Hypotenusan kallas den längsta sidan i en rätvinklig triangel

Kateterna kallas de två andra sidorna som bildar den räta vinkeln



Det råder ett samband mellan längden på hypotenusan och längderna på kateterna:

$$(\text{hypotenusan})^2 = (\text{katet nr 1})^2 + (\text{katet nr 2})^2$$

Det är alltså inget linjärt förhållande, utan du måste **kvadrera** längden på katet nr 1 och lägga till **kvadraten** på katet nr 2 samt summera. Denna summa är lika med **kvadraten** på hypotenusan.

Exempel 1: En rätvinklig triangel har kateterna 3 m och 4 m. Hur lång är hypotenusan?

Lösning: katet nr 1=3 m. $(\text{katet nr 1})^2 = 3^2 = 9$.

Katet nr 2=4 m. $(\text{katet nr 2})^2 = 4^2 = 16$

Summan av kateterna i kvadrat = $9 + 16 = 25$

$(\text{hypotenusan})^2 = 25$. Hypotenusan = $\sqrt{25} = 5$ m

Det här är en rätvinklig triangel som kallas **Pythagoreisk**. Sidorna är heltal. Så är inte alltid fallet. Men Pythagoras trodde på talens mystik, och detta var hans "drömtriangel", en så kallad 3 – 4 – 5 triangel.

Omvänt så gäller att om du har ett måttband och mäter upp en triangel med sidorna 3 längdenheter, 4 längdenheter och 5 längdenheter så får du en rätvinklig triangel. Det var just vad Antikens byggmästare gjorde, eller till exempel vad en tillverkare av takplåt rekommenderar för att få en rät vinkel så plåten kommer rätt på taken.

Vi kan också beskriva Pythagoras' sats med hjälp av en formel.

Beteckna katet nr 1 med längden a
katet nr 2 med längden b
hypotenusan med längden c

$$\text{Då får vi: } a^2 + b^2 = c^2$$

Vi tar några exempel. Använd räknare, för det är inte alltid lika snälla siffror som i 3-4-5 triangeln. Rita gärna en figur, och sätt ut vad du vet och vad du söker i figuren. Då blir det lättare att tänka. En bild säger mer än 1000 ord! Visa hur du räknar, och glöm inte bort när du svarar!

4-7-01 En katet är 4 m och den andra är 5 m.

Hur lång är hypotenusan?

Svar:.....

4-7-02 En rätvinklig triangel har kateterna 2 cm och 4 cm.

Hur lång är hypotenusan?

Svar:.....

4-7-03 En katet är 3 dm och en annan är 12 dm.

Hypotenusan?

Svar:.....

4-7-04 Kateterna i en rätvinklig triangel är 14 m och 17 m.

Hypotenusan?

Svar:.....

4-7-05 Kateterna är 3 dm och 19 cm.

Beräkna hypotenusan!

Svar:.....

Den sista uppgiften var lite lurig. Var låg utmaningen?

Svar:.....

Hypotenusan och en katet given

Det kan ju vara så att du söker en katet när den andra kateten och hypotenusan är givna. Hur gör du nu? Beskriv nedan.

Svar:.....

.....

Det blir lite komplicerat, men ingenting är omöjligt. Beteckna kateterna med a och b samt hypotenusan med c. Då gäller ju:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Antag att b och c är givna. Du söker alltså a. För att vara tydliga kallar vi den för x. Se det hela som en ekvation och subtrahera b^2 från båda leden (dvs det som står till vänster respektive höger om likhetstecknet). Då får du:

$$x^2 + b^2 - \underline{b^2} = c^2 - \underline{b^2} \qquad \text{eftersom } b^2 - b^2 = 0 \text{ så får vi:}$$

$$x^2 = c^2 - b^2$$

4-7-06 Hypotenusan och en katet är 7 respektive 4 cm.

Hur lång är den andra kateten?

Svar:.....

4-7-07 En katet är 7 m och hypotenusan är 10 m.

Hur lång är den andra kateten?

Svar:.....

4-7-08 Hypotenusan är 22 cm och en katet är 13 cm.
Hur lång är den andra?

Svar:.....

4-7-09 Hypotenusan är 3 dm och en katet är 13 cm.
Hur lång är den andra?

Svar:.....

Lite överkurs:

Hur kan man bevisa att Pythagoras' sats gäller för alla rätvinkliga trianglar?

Vi skall göra ett matematiskt bevis för Pythagoras' sats. Ett sådant utgår från kända, ofta enkla, fakta, och utifrån detta kan man med logiska resonemang visa någonting som verkar komplicerat. Vi gör ett försök!

Vi startar med en rätvinklig triangel, som i figuren till höger. Hypotenusan = c och kateterna kallar vi a och b .

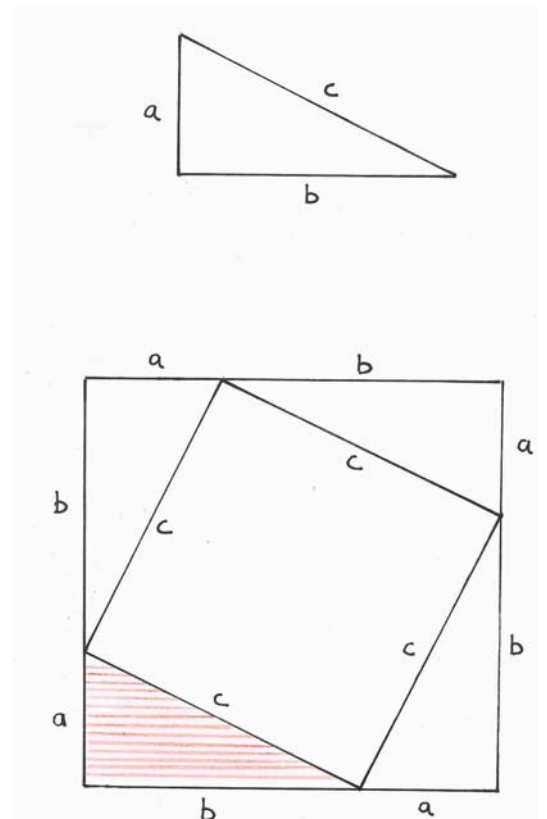
Nu gör vi en konstruktion, där vi bygger på med tre lika dana trianglar, så vi får en kvadrat med sidan $(a + b)$.

Titta på fyrkanten i mitten. Vilken typ av fyrkant är det?

Svar:.....

.....

Just det – det är en kvadrat. Alla sidor är lika långa = c , och vinklarna är lika stora av symmetriskäl. Då måste de vara 90 grader. Således har vi en kvadrat i mitten.



Vi tecknar arean på den stora kvadraten. Den har sidan $(a + b)$, så arean blir $(a + b)^2$
Samma area kan vi teckna på ett annat sätt: Vi har 4 identiska trianglar med respektive arean $\frac{a * b}{2}$, dvs totalt $4 * \frac{a * b}{2}$, eller $2 * a * b$ eller $2ab$

Kvadraten i mitten har sidan c (hypotenusan på triangeln), och arean blir c^2

Alltså gäller: $(a + b)^2 = 2ab + c^2$

Således: $a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$

$(a + b)^2$ utvecklas till $a^2 + b^2 + 2ab$

tag bort $2ab$ från båda leden!

Resultat: $a^2 + b^2 = c^2$



Vilket skulle bevisas!

Som du märkte har vi fört ett allmänt resonemang med bokstavsbeteckningar för respektive sidor samt tillämpat algebrans räkneregler. På så sätt har vi inte gjort några begränsningar, utan satsen gäller för alla talvärden på a , b och c .

Veckans gåta:

Vad har en sjuk iller fått?

Det här var lite annorlunda än vad du är van vid, men misströsta inte. Du har just gått igenom lite kvalificerad matte, och klarat det bra! Lycka till med träningsuppgifterna som kommer. Och tänk på en sak: ta det lugnt, rita figurer och tänk på vad du lärt dig hittills. Lycka till !

4-7 Pythagoras' sats. Träningsuppgifter

Nivå 1:

4-7-100 Vad menas med en katet?

4-7-101 Vad menas med en hypotenusan?

4-7-102 Vad säger Pythagoras' sats?

4-7-103 En katet är 2 cm och en annan är 4 cm.
Hur lång är hypotenusan?

4-7-104 En katet är 4 cm och hypotenusan är 5 cm.
Hur lång är den andra kateten?

4-7-105 En kvadrat har sidan 4 m.
Hur lång är diagonalen?

4-7-106 En rektangel har måtten 3×7 m.
Hur lång är diagonalen?

4-7-107 Längden på kateterna i en
rätvinklig triangel är 12 m
och 8 m. Hur lång är
hypotenusan?

4-7-108 En tennisbana är rektangulär
till sin form, och har måtten
 $23,77 \times 10,97$ m. Hur lång är
diagonalen?

4-7-109 Ett A4 ark har måtten
 $21 \times 29,8$ cm. Hur lång är
diagonalen?

Nivå 2:

- 4-7-200 En liksidig triangeln har sidan 8 cm. Hur lång är höjden?
- 4-7-201 I en romb är den spetsiga vinkeln 60 grader. Sidorna är 12 cm och 6 cm. Hur lång är höjden?
- 4-7-202 En gräsmatta har formen av en rektangel med måtten 80x120 m. Hur många meter tjänar man på att gå längs diagonalen jämfört med att gå runt längs den långa och den korta sidan för att komma diagonalt över gräsmattan?
- 4-7-203 I en rätvinklig triangel är ena kateten 1 m längre än den andra. Hypotenusan är 5 m. Hur långa är kateterna? Det blir en heltalslösning – prova dig fram.
- 4-7-204 En 42 tums wide-screen har måtten 92x52 cm. Hur lång är diagonalen, och lever den upp till att den skall vara 42 tum? 1 tum=2,54 cm.

Nivå 3:

- 4-7-300 I en romboid med måtten 8 cm och 4 cm är den spetsiga vinkeln 30 grader. Hur stor är romboidens area?
- 4-7-301 Ett storsegel har formen av en rätvinklig triangel (vinkeln mellan bommen och masten är rät). Vinkeln mellan bomliket och akterliket är 60 grader och bomliket är 4 m långt. Hur stor area har storseglet?
- 4-7-302 En wide-screen TV har följande mått: höjden är 52 cm och diagonalen är 105 cm. Hur stor är arean?
- 4-7-303 En cirkel är inskriven i en liksidig triangel där sidan är 8 dm. Hur stor är cirkelns radie?